Soluzioni Secondo esonero e primo recupero di Analisi Matematica II (primi 5 crediti) del 28–11–07

Ingegneria Elettronica A.A.2007/2008

Problema 1 Si calcoli il VOLUME della porzione di spazio tale che: 1) è interna al cono $z = b\sqrt{x^2+y^2}$, 2) è interna alla sfera PIENA di equazione $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, 3) l'ordinata dei punti è minore o uguale all'ordinata dei punti di intersezione fra cono e sfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$,
I dati di ciascun problema possono essere riassunti in $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ e $z = b\sqrt{x^2+y^2}$. L'intersezione delle due figure dà $b(x^2+y^2)+(x^2+y^2) = a^2$ ossia $x^2+y^2 = \dfrac{a^2}{1+b^2} \doteq r_0^2$ da cui $z = \dfrac{ab}{\sqrt{1+b^2}} = br_0$ La proiezione sul piano (x, y) dell'intersezione è un cerchio di raggio $\dfrac{a}{\sqrt{1+b^2}}$. Parametrizzando il cerchio in questione come $x = r_0\rho\cos t$, $x = r_0\rho\sin t$, l'integrale che cerchiamo è

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} dt\ r_0^2\rho(br_0 - br_0\rho) = \frac{\pi}{3}\frac{ba^3}{(1+b^2)^{3/2}}$$

e quindi i risultati sono: A–$\pi\frac{8}{3}$ B–$\pi\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C–$\pi 2\sqrt{2}$, D–$\pi\frac{64}{3}$

Problema 2 Si calcoli la SUPERFICIE della porzione di cono $z = b\sqrt{x^2+y^2}$ interna alla sfera PIENA di equazione $x^2+y^2+z^2 \le a^2$.

Le premesse sono le stesse dell'esercizio precedente e l'integrale che cerchiamo è

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} dt\sqrt{1+b^2}r_0^2\rho = \frac{\pi a^2}{\sqrt{1+b^2}}$$

e quindi A–$\pi 4\sqrt{2}$ B–$\pi 4$ C–$\pi 4\sqrt{3}$ D–$\pi 16\sqrt{2}$

Problema 3 Si consideri il volume, detto V, costituito dai punti della sfera piena $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ che soddisfano l'equazione $z \le b\sqrt{x^2+y^2}$ e si consideri la superficie, detta S, che contiene al suo interno tale volume V. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$ attraverso la superficie S.

La superficie in questione "ha due facce"; una esterna ed una interna. Quella esterna è data da $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \le br_0$ mentre quella interna è $z = b\sqrt{x^2+y^2}$, $z \le br_0$. Applichiamo il teorema della divergenza parametrizzando il volume in coordinate polari $x = a\rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = a\rho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = a\rho\cos\vartheta$

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta_0}^{\pi} d\vartheta a^3\rho^2 3\rho^2\sin\vartheta = \frac{6}{5}a^3(1+\cos\vartheta_0)$$

dove ϑ_0 è quell'angolo per cui $br_0 = a\cos\vartheta_0$ e si ottiene rispettivamente $\vartheta_0 = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}$ e quindi i risultati sono A–$\dfrac{96}{5}(\sqrt{2}+1)$, B–$\dfrac{48}{5}(2\sqrt{2}+\sqrt{6})$, C–$\dfrac{144}{5}\sqrt{2}$, D–$\dfrac{768}{5}(1+\sqrt{2})$,

Problema 4–A Per tutti e quattro i casi, un gran numero di studenti/sse non ha riconosciuto che era inutile scrivere la serie di Fourier di una delle funzioni essendo già sviluppata. Impostare lo stesso il conto non era sbagliato ma ha rallentato il prosieguo.

Se ad esempio si chiede di sviluppare in serie di Fourier quella funzione, detta $F(x)$, 2π–periodica dispari che nell'intervallo $[0,2\pi]$ è data da $\sin x$, ebbene lo sviluppo di Fourier è $\sin x$. La prova è data dai calcoli. Innanzitutto, nell'intervallo $[-\pi,0]$ abbiamo $F(x)=-\sin(-x)=\sin x$ (come ci aspettavamo). Il coefficiente di Fourier di F è $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin kx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\sin x\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(-\cos(k+1)x+\cos(k-1)x)dx=0$ evidentemente <u>a meno che</u> non sia $k=1$ nel qual caso si ha $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\sin x\sin x=1$

Si scriva le serie di Fourier della funzione 2π–periodica, dispari, che nell'intervallo $[0,\pi]$ è data da $f(x)+g(x)$ dove $g(x)=\sin(4x)$ e

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi/2,\\ 0 & \pi/2\le x<\pi\end{cases}$$

$g(x)$ è già sviluppata in serie di Fourier ed i suoi coefficienti sono tutti nulli tranne il coefficiente associato a $\sin(4x)$ che vale 1. Detta $F(x)$ la funzione che cerchiamo, abbiamo $F_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx\sin(kx)\cos x=-\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi\frac{k}{2})-k}{k^2-1}$ se $k\neq1$ e $1/\pi$ se $k=1$. Se dunque $k=2p$ abbiamo $F_{2p}=\frac{4p}{\pi(4p^2-1)}$. Se invece $k=2p+1$ ma $p\neq0$, abbiamo $F_{2p+1}=\frac{2p+1+(-)^{p+1}}{2\pi(p+p^2)}$. Se introduciamo il simbolo di uso corrente $\delta_{k,j}$ che vale 0 quando $k\neq j$ e 1 quando $k=j$, (la *delta di Kronecker* si veda `http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kronecker.html`) otteniamo

$$F(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\sin(2px)\Big(\frac{4p}{\pi(4p^2-1)}+\delta_{p,2}\Big)+\sum_{p=1}^{+\infty}\sin x(2p+1)\Big(\frac{2p+1+(-)^{p+1}}{2\pi(p+p^2)}\Big)+\frac{\sin x}{\pi}$$

Problema 4–B Si scriva le serie di Fourier della funzione 2π–periodica, pari, che nell'intervallo $[0,\pi]$ è data da data da $f(x)+g(x)$ dove $g(x)=\cos(4x)$ e

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x<\pi/2,\\ 0 & \pi/2\le x<\pi\end{cases}$$

$g(x)$ è già sviluppata in serie di Fourier ed i suoi coefficienti sono tutti nulli tranne il coefficiente associato a $\cos(4x)$ che vale 1. Detta $F(x)$ la funzione che cerchiamo, abbiamo $F_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx\cos(kx)\sin x=\frac{2}{\pi}\frac{k\sin(\pi\frac{k}{2})-1}{k^2-1}$ se $k\neq1$ e $1/\pi$ se $k=1$. Se dunque $k=2p$ abbiamo $F_{2p}=\frac{-2}{\pi(4p^2-1)}$. Se invece $k=2p+1$ ma $p\neq0$, abbiamo $F_{2p+1}=\frac{(2p+1)(-)^p-1}{2\pi(p+p^2)}$. Se introduciamo il simbolo di uso corrente $\delta_{k,j}$ che vale 0 quando $k\neq j$ e 1 quando $k=j$, (la *delta di Kronecker* si veda `http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kronecker.html`) otteniamo

$$F(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\cos(2px)\Big(\frac{-2}{\pi(4p^2-1)}+\delta_{p,2}\Big)+\sum_{p=1}^{+\infty}\cos x(2p+1)\Big(\frac{(2p+1)(-)^p-1}{2\pi(p+p^2)}\Big)+\frac{\cos x}{\pi}$$

Problema 4–C Si scriva le serie di Fourier della funzione 2π–periodica, dispari, che nell'intervallo $[0,\pi]$ è data da data da $f(x)+g(x)$ dove $g(x)=\sin(3x)$ e

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x & 0<x<\pi/2,\\ 0 & \pi/2\le x<\pi\end{cases}$$

$g(x)$ è già sviluppata in serie di Fourier ed i suoi coefficienti sono tutti nulli tranne il coefficiente associato a $\sin(3x)$ che vale 1. Detta $F(x)$ la funzione che cerchiamo, abbiamo $F_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx\sin(kx)\cos(2x)=\frac{2}{\pi}\frac{k\cos(\pi\frac{k}{2})+k}{k^2-4}$ se $k\neq 2$ e 0 se $k=2$. Se dunque $k=2p$ ma $p\neq 1$ abbiamo $F_{2p}=\frac{p((-)^p-1)}{(p^2-1)}$. Se invece $k=2p+1$ abbiamo $F_{2p+1}=\frac{4p+2}{\pi(4p^2+4p-3)}$. Se introduciamo il simbolo di uso corrente $\delta_{k,j}$ che vale 0 quando $k\neq j$ e 1 quando $k=j$, (la *delta di Kronecker* si veda `http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kronecker.html`) otteniamo

$$F(x)=\sum_{p=2}^{+\infty}\sin(2px)\frac{p((-)^p-1)}{(p^2-1)}+\sum_{p=0}^{+\infty}\sin x(2p+1)\Big(\frac{4p+2}{\pi(4p^2+4p-3)}+\delta_{p,1}\Big)$$

Problema 4–D Si scriva le serie di Fourier della funzione 2π–periodica, pari, che nell'intervallo $[0,\pi]$ è data da data da $f(x)+g(x)$ dove $g(x)=\cos(3x)$ e

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x & 0<x<\pi/2,\\ 0 & \pi/2\le x<\pi\end{cases}$$

$g(x)$ è già sviluppata in serie di Fourier ed i suoi coefficienti sono tutti nulli tranne il coefficiente associato a $\cos(3x)$ che vale 1. Detta $F(x)$ la funzione che cerchiamo, abbiamo $F_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx\cos(kx)\sin(2x)=\frac{-4}{\pi}\frac{\cos(\pi\frac{k}{2})+1}{k^2-4}$ se $k\neq 2$ e 0 se $k=2$. Se dunque $k=2p$ e $p\neq 1$ abbiamo $F_{2p}=\frac{1-(-)^p}{\pi(p^2-1)}$. Se invece $k=2p+1$ abbiamo $F_{2p+1}=\frac{-4}{\pi(4p^2+4p-3)}$. Se introduciamo il simbolo di uso corrente $\delta_{k,j}$ che vale 0 quando $k\neq j$ e 1 quando $k=j$, (la *delta di Kronecker* si veda `http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kronecker.html`) otteniamo

$$F(x)=\sum_{p=2}^{+\infty}\cos(2px)\frac{1-(-)^p}{\pi(p^2-1)}+\sum_{p=0}^{+\infty}\cos x(2p+1)\Big(\frac{-4}{\pi(4p^2+4p-3)}+\delta_{p,1}\Big)$$

Problema 5 Si risolva le seguente equazione ($a=\pm1$, $b=\pm1$, $d=1,2,3,4$)

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=e^{-dt} & 0<x<\pi,\ t>0\\ u(x,0)=a\sin x+b\sin(2x), & u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$$

La soluzione è scrivibile come $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k(t)$ e le $u_k(t)$ soddisfano le equazioni $u_k'(t)+k^2u_k(t)=c_ke^{-dt}$ dove c_k è il coefficiente di Fourier della funzione 1 sviluppata solo secondo i seni e quindi

$c_k = \dfrac{2(1-(-)^k)}{\pi k}$. Cominciamo coi k pari. $u_k'(t) + k^2 u_k(t) = 0$ ossia $u_k(t) = r_k e^{-k^2 t}$. Per k dispari abbiamo $u_k'(t) + k^2 u_k(t) = c_k e^{-dt}$. La soluzione della non omogenea come al solito è $c_k e^{-k^2 t}\displaystyle\int e^{-t(d-k^2)}dt = c_k \frac{e^{-dt}}{k^2-d}$ se $d \neq k^2$. Se $d = k^2$ allora si ha $c_k e^{-k^2 t}\displaystyle\int e^{-t(d-k^2)}dt = c_k t e^{-k^2 t}$. Dunque abbiamo: se $d \neq k^2$ $u_k(t) = r_k e^{-k^2 t} + c_k \dfrac{e^{-dt}}{k^2-d}$; se $d = k^2$ si ha $u_k(t) = r_k e^{-k^2 t} + c_k t e^{-k^2 t}$. Poi bisogna trovare i coefficienti r_k in modo da soddisfare la condizione iniziale ossia $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx) u_k(0) = a \sin x + b \sin(2x)$ e quindi $u_k(0) = 0$ se $k \neq 1, 2$, $u_1(0) = a$, $u_2(0) = b$. Distinguiamo i quattro casi

A. $d = 1$, $a = b = 1$. $u_1(0) = r_1 e^{-t} + c_1 t e^{-t}\Big|_{t=0} = r_1 = a$, $u_2(0) = r_2 e^{-4t}\Big|_{t=0} = r_2 = b$, $u_{2k}(0) = r_{2k} = 0$, $u_{2k+1}(0) = r_{2k+1} + \dfrac{c_{2k+1}}{4k^2+4k+1-d} = 0$ da cui $r_{2k+1} = -\dfrac{c_{2k+1}}{4k^2+4k+1-d}$ con $k \neq 0$. La soluzione alla fine è

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (e^{-t} + \frac{4}{\pi} t e^{-t}) \sin x + \sin(2x) e^{-4t} + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(2k+1)x \Big(\frac{-1}{k^2+k} e^{-(2k+1)^2 t} + \frac{1}{k^2+k} e^{-t} \Big) \frac{1}{\pi(2k+1)} \end{aligned}$$

B. $d = 2$, $a = -b = 1$. In questo caso, per ogni valore di k abbiamo $u_k(t) = r_k e^{-k^2 t} + c_k \dfrac{e^{-dt}}{k^2-d}$; e quindi $u_1(0) = r_1 + \dfrac{c_1}{1-d} = 1$ ossia $r_1 = 1 - \dfrac{c_1}{1-d}$. $u_2(0) = r_2 = -1$. $u_k(0) = r_k + \dfrac{c_k}{k^2-d} = 0$ da cui $r_k = -\dfrac{c_k}{k^2-d}$. La soluzione alla fine è

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \big((1 + \frac{4}{\pi}) e^{-t} - \frac{4}{\pi} e^{-2t}\big) \sin x - \sin(2x) e^{-4t} + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(2k+1)x \Big(\frac{-1}{4k^2+4k-1} e^{-(2k+1)^2 t} + \frac{1}{4k^2+4k-1} e^{-2t} \Big) \frac{4}{\pi(2k+1)} \end{aligned}$$

C. $d = 3$, $-a = b = 1$. In questo caso, per ogni valore di k abbiamo $u_k(t) = r_k e^{-k^2 t} + c_k \dfrac{e^{-dt}}{k^2-d}$; e quindi $u_1(0) = r_1 + \dfrac{c_1}{1-d} = -1$ ossia $r_1 = -1 - \dfrac{c_1}{1-d}$. $u_2(0) = r_2 = 1$. $u_k(0) = r_k + \dfrac{c_k}{k^2-d} = 0$ da cui $r_k = -\dfrac{c_k}{k^2-d}$. La soluzione alla fine è

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \big((-1 - \frac{2}{\pi}) e^{-t} + \frac{2}{\pi} e^{-3t}\big) \sin x + \sin(2x) e^{-4t} + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(2k+1)x \Big(\frac{-1}{4k^2+4k-2} e^{-(2k+1)^2 t} + \frac{1}{4k^2+4k-2} e^{-3t} \Big) \frac{4}{\pi(2k+1)} \end{aligned}$$

D. $d = 4$, $a = b = -1$. $u_1(0) = r_1 e^{-t} + \dfrac{c_1}{1-4} e^{-4t}\Big|_{t=0} = r_1 - \dfrac{c_1}{3} = -1$, ossia $r_1 = -1 + \dfrac{4}{\pi 3}$ $u_2(0) = r_2 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}\Big|_{t=0} = r_2 = -1$, $u_{2k}(0) = r_{2k} = 0$, se $k \neq 1$, $u_{2k+1}(0) = r_{2k+1} +$

$\dfrac{c_{2k+1}}{4k^2+4k+1-d}=0$ da cui $r_{2k+1}=-\dfrac{c_{2k+1}}{4k^2+4k+1-d}$ con $k\neq 0$. La soluzione alla fine è

$$u(x,t)=((-1+\frac{4}{3\pi})e^{-t}-\frac{4}{3\pi}e^{-4t})\sin x+\sin(2x)e^{-4t}(-1+\frac{2}{\pi}t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(2k+1)x\Big(\frac{-1}{k^2+k-3}e^{-(2k+1)^2t}+\frac{1}{k^2+k-3}e^{-4t}\Big)\frac{4}{\pi(2k+1)}$$

Problema 6–A Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x+\cos 2x \quad 0<x<\pi,\ t>0\\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=\sin 2x-\cos x, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$$

Cominciamo con lo sviluppare secondo i soli seni $\cos x$ e $\cos(2x)$. Sia c_k il coeffciente di $\cos x$. Si ha $c_1=0$, $c_k=2\dfrac{k(\cos(k\pi)+1)}{\pi(k^2-1)}=\dfrac{2}{\pi}k\dfrac{1+(-)^k}{k^2-1}$. Se d_k è il coefficiente di $\cos(2x)$ si ha $d_2=0$, $d_k=2\dfrac{k(-\cos(k\pi)+1)}{\pi(k^2-4)}=\dfrac{2}{\pi}k\dfrac{1-(-)^k}{k^2-4}$.

$\sin 2x-\cos x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}g_k\sin kx$ con $g_1=0$, $g_2=1-\dfrac{8}{3\pi}$, $g_{2p+1}=0$, $g_{2p}=\dfrac{-8p}{\pi(4p^2-1)}$ e $p\neq 1$.

$\sin x+\cos 2x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}f_k\sin kx$ con $f_1=1-\dfrac{4}{3\pi}$, $f_2=0$, $f_{2p+1}=\dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-3)}$ e $p\neq 0$, $f_{2p}=0$.

La soluzione generale è come al solito $u(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k(t)$ e le $u_k(t)$ soddisfano le equazioni $u_k''(t)+k^2u_k(t)=f_k$ da cui $u_k(t)=A_k\cos(kt)+B_k\sin(kt)+\dfrac{f_k}{k^2}$. $u_t(x,0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k'(0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)kB_k=\sin 2x-\cos x=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k\sin(kx)$ e quindi $B_k=\dfrac{g_k}{k}$. $B_1=g_1=0$, $B_2=\dfrac{1-c_2}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3\pi}$, $B_{2p}=\dfrac{-4}{\pi(4p^2-1)}$, $p\neq 1$, $B_{2p+1}=0$.

L'altra condizione iniziale $u(x,0)=\sin x$ dà $A_k+\dfrac{f_k}{k^2}=\delta_{1,k}$ e quindi $A_1=\dfrac{4}{3\pi}$, $A_{2p+1}=\dfrac{-4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)}$, $p\neq 0$, $A_{2p}=0$. Alla fine il risultato è

$$u(x,t)=\frac{4}{3\pi}\sin x+(\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi})\sin(2t)\sin(2x)+$$
$$+\sum_{p=1}^{+\infty}\sin(2p+1)x\frac{4}{\pi(4p^2+4p-3)(2p+1)}(1-\cos(2p+1)t)+$$
$$+\sum_{p=2}^{+\infty}\sin(2px)\sin(2pt)\frac{-4}{\pi(4p^2-1)}$$

Problema 6–B Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x+\cos x \quad 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=\sin 2x-\cos x, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Cominciamo con lo sviluppare secondo i soli seni $\cos x$. Sia c_k il coeffciente di $\cos x$. Si ha $c_1=0$, $c_k=2\dfrac{k(\cos(k\pi)+1)}{\pi(k^2-1)}=2k\dfrac{1+(-)^k}{\pi(k^2-1)}$.

$\sin x+\cos x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\sin kx$ con $f_1=1$, $f_{2p+1}=0$, $f_{2p}=\dfrac{8p}{\pi(4p^2-1)}$

$\sin 2x-\cos x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g_k\sin kx$ con $g_1=0$, $g_2=1-\dfrac{8}{3\pi}$, $g_{2p+1}=0$, $g_{2p}=\dfrac{-8p}{\pi(4p^2-1)}$ e $p\neq 1$.

La soluzione generale è come al solito $u(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k(t)$ e le $u_k(t)$ soddisfano le equazioni

$u_k''(t)+k^2u_k(t)=f_k$ da cui $u_k(t)=A_k\cos(kt)+B_k\sin(kt)+\dfrac{f_k}{k^2}$. $u_t(x,0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k'(0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)kB_k=\sin 2x-\cos x=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k\sin(kx)$ e quindi $B_k=\dfrac{g_k}{k}$. $B_1=g_1=0$, $B_2=\dfrac{1-c_2}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3\pi}$, $B_{2p}=\dfrac{-4}{\pi(4p^2-1)}$, $p\neq 1$, $B_{2p+1}=0$.

L'altra condizione iniziale $u(x,0)=\sin x$ dà $A_k+\dfrac{f_k}{k^2}=\delta_{1,k}$ e quindi $A_1=0$, $A_{2p+1}=0$, $A_{2p}=\dfrac{-2}{\pi p(4p^2-1)}$, $p\neq 0$,

Alla fine il risultato è

$$u(x,t)=\sin x+\sum_{p=1}^{+\infty}\sin(2px)(\cos(2t)-1)\frac{-2}{\pi p(4p^2-1)}+$$
$$+\sum_{p=2}^{+\infty}\sin(2px)\sin(2pt)\frac{-4}{\pi(4p^2-1)}+\sin(2x)\sin(2t)(\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi})$$

Problema 6–C Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin x+\cos 3x \quad 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=\sin 2x-\cos 3x, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Cominciamo con lo sviluppare secondo i soli seni $\cos 3x$. Sia c_k il coeffciente di $\cos 3x$. Si ha $c_k=2\dfrac{k(\cos(k\pi)+1)}{\pi(k^2-9)}=\dfrac{2}{\pi}k\dfrac{1+(-)^k}{k^2-9}$ se $k\neq 3$ e $c_3=0$.

$\sin x+\cos 3x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\sin kx$ con $f_1=1$, $f_{2p+1}=0$, $f_{2p}=\dfrac{8p}{\pi(4p^2-9)}$.

$\sin 2x-\cos 3x=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g_k\sin kx$ con $g_{2p+1}=0$, $g_{2p}=\dfrac{-8p}{\pi(4p^2-9)}$, $p\neq 1$, $g_2=1-\dfrac{8}{5\pi}$

La soluzione generale è come al solito $u(x,t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k(t)$ e le $u_k(t)$ soddisfano le equazioni

$u_k''(t)+k^2u_k(t)=f_k$ da cui $u_k(t)=A_k\cos(kt)+B_k\sin(kt)+\dfrac{f_k}{k^2}$. $u_t(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k'(0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)kB_k=\sin 2x-\cos 3x=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}g_k\sin(kx)$ e quindi $B_k=\dfrac{g_k}{k}$. $B_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{5\pi}$, $B_{2p}=\dfrac{-4}{\pi(4p^2-9)}$, $p\neq 1$, $B_{2p+1}=0$.

L'altra condizione iniziale $u(x,0)=\sin x$ dà $A_k+\dfrac{f_k}{k^2}=\delta_{1,k}$ e quindi $A_1=0$, $A_{2p+1}=0$, $A_{2p}=\dfrac{-2}{\pi p(4p^2-9)}$. Alla fine il risultato è

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\sin x+(\frac{1}{2}-\frac{4}{5\pi})\sin(2t)\sin(2x)+\\
&+\sum_{p=1}^{+\infty}\sin(2px)\frac{2}{\pi p(4p^2-9)}(1-\cos 2pt)+\\
&+\sum_{p=2}^{+\infty}\sin(2px)\sin(2pt)\frac{-4}{\pi(4p^2-9)}
\end{aligned}
$$

Problema 6–D Si risolva la seguente equazione differenziale

$$
\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin x+\cos 4x & 0<x<\pi,\ t>0\\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=\sin 2x-\cos 4x, & u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}
$$

Cominciamo con lo sviluppare secondo i soli seni $\cos 4x$. Sia c_k il coeffciente di $\cos 4x$. Si ha $c_k=2\dfrac{k(-\cos(k\pi)+1)}{\pi(k^2-16)}=\dfrac{2}{\pi}k\dfrac{1-(-)^k}{k^2-16}$ se $k\neq 4$ e $c_4=0$.

$\sin x+\cos 4x=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f_k\sin kx$ con $f_1=1-\dfrac{4}{15\pi}$, $f_{2p}=0$, $f_{2p+1}=\dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-15)}$.

$\sin 2x-\cos 4x=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}g_k\sin kx$ con $g_{2p+1}=\dfrac{4(2p+1)}{\pi(4p^2+4p-15)}$, $g_2=1$

La soluzione generale è come al solito $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k(t)$ e le $u_k(t)$ soddisfano le equazioni

$u_k''(t)+k^2u_k(t)=f_k$ da cui $u_k(t)=A_k\cos(kt)+B_k\sin(kt)+\dfrac{f_k}{k^2}$. $u_t(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)u_k'(0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sin(kx)kB_k=\sin 2x-\cos 4x=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}g_k\sin(kx)$ e quindi $B_k=\dfrac{g_k}{k}$. $B_2=\dfrac{1}{2}$, $B_{2p+1}=\dfrac{4}{\pi(4p^2+4p-15)}$.

L'altra condizione iniziale $u(x,0)=\sin x$ dà $A_k+\dfrac{f_k}{k^2}=\delta_{1,k}$ e quindi $A_1=\dfrac{4}{15\pi}$ $A_{2p+1}=$

$\dfrac{4}{\pi(2p+1)(4p^2+4p-15)}$, $A_{2p}=0$. Alla fine il risultato è

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{4}{15\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin(2t)\sin(2x)+\\ &+\sum_{p=1}^{+\infty}\sin(2px)\frac{4}{\pi(2p+1)(4p^2+4p-15)}(\cos 2pt-1)+\\ &+\sum_{p=0}^{+\infty}\sin(2p+1)x\sin(2p+1)t\frac{4}{\pi(4p^2+4p-15)}\end{aligned}$$